

Laplace

HAN, Robert Steennis, bijgewerkt Bram Steennis
13-02-2015, 8-02-2017 en 25-09-2017

Periodieke signalen herhalen zichzelf met een zekere periodetijd. Deze signalen kunnen geschreven worden door verschillende sinus- en cosinusvormige signalen (met grondfrequentie ω) en vervolgens daarbij de harmonische frequenties in zekere sterkte bij op te tellen. Wiskundig gebruiken we daarvoor onderstaande, overigens hier enigszins vereenvoudigde formule:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots \quad \{1\}$$

Een filmpje op Youtube <https://www.youtube.com/watch?v=LznjC4Lo7IE> laat bijvoorbeeld zien hoe, uitgaande van alleen de b termen en met oneven harmonischen een blokgolfvormig signaal wordt gerealiseerd. Hoe meer termen meegenomen worden, hoe nauwkeuriger de beschrijving van de het oorspronkelijke periodieke signaal wordt.

De algemene formule die hierbij hoort is de fourierreeks die hierboven {1} staat. Verkort genoteerd krijgen we onderstaande formule {2}:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \{2\}$$

Als we een bepaalde periodieke signaalgewijze hebben en we willen weten welke waarden a en b zullen worden, dan kunnen we gebruik maken van de volgende formules:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \{3\}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \{4\}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \{5\}$$

Voorbeeld: Stel een periodiek blokgolfvormig signaal $x(t)$ met sterkte tussen 0 en 1 en periodetijd $T = 1s$, als volgt:



Als we dit uitwerken volgt dat $a_0 = 0,5$, zijnde de gemiddelde waarde van het signaal, waaromheen de sinussen en cosinussen zullen zitten, met amplitudes $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, etc en $b_1 = 2/\pi = 0,64$, $b_2 = 0$, $b_3 = 2/3\pi = 0,21$ etc. $T = 1s$, dus $\omega = 6,28$ rad/s.

De beschrijving van het signaal wordt dus:

$$x(t) = 0,5 + 0,64 \sin(6,28t) + 0,21 \sin(18,84t) + \dots \quad \{6\}$$

Dus als k naar oneindig gaat, wordt het oorspronkelijke blokgolfvormige signaal $x(t)$ het best benaderd.

We kunnen de Euler notatie gebruiken om de stap naar Laplace te maken.

De formule van Euler legt een verband tussen de sinus en cosinus en de complexe exponentiele functie:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad \{7\}$$

Het formele bewijs kan gevonden worden vanuit de reeksontwikkeling. Daarbij geldt dat

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{en} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Voor meer achtergrondinformatie over reeksontwikkelingen, zie bv Wikipedia of

<http://www.astrovdm.com/Reeksontwikkeling.pdf>

$$\text{Opdracht: bewijs uit bovenstaand dat } e^{jx} = \cos x + j \sin x \text{ en } e^{-jx} = \cos x - j \sin x \quad \{8\}$$

Door deze formules bij elkaar op te tellen en af te trekken volgt:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{en} \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \{9\}$$

Met $x = \omega t$, krijgen we:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \text{en} \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \{10\}$$

Met deze formules van Euler {10} kan de Fourier reeks {2} nu in een andere vorm worden geschreven:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) + b_k \frac{1}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}) \right) = \quad \{11\}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{jk\omega t} \left(a_k \frac{1}{2} + b_k \frac{1}{2j} \right) + e^{-jk\omega t} \left(a_k \frac{1}{2} - b_k \frac{1}{2j} \right) \right) = \quad \{12\}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{jk\omega t} \left(a_k \frac{1}{2} - j b_k \frac{1}{2} \right) + e^{-jk\omega t} \left(a_k \frac{1}{2} + j b_k \frac{1}{2} \right) \right) = \quad \{13\}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{jk\omega t} (c_n) + e^{-jk\omega t} (c_{-n}) \right) \quad \{14\}$$

Dan is c_n via formule {4} te schrijven als

$$c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \right) = \quad \{15\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \quad \{16\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \{17\}$$

Nu is $f(t)$ nog steeds een periodieke functie met een constante sterkte. Als we deze functie vermenigvuldigen met $e^{-\alpha t}$, dan nemen we de demping van dit signaal ook mee, wat in de regeltechniek gebruikelijk is. We krijgen dan:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-n\alpha t} e^{-jn\omega t} dt = \quad \{18\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-n\alpha t - jn\omega t} dt \quad \{19\}$$

Stel nu $s = \alpha + j\omega$ dan krijgen we: {20}

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-nst} dt \quad \{21\}$$

Nemen we n tot oneindig mee, dan gaat de formule over* in

$$c_{0 \text{ tot } \infty} = \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \{22\}$$

F is de primitieve van de integraal en blijkt (!) nu een functie te zijn van s en heet de Laplace getransformeerde.

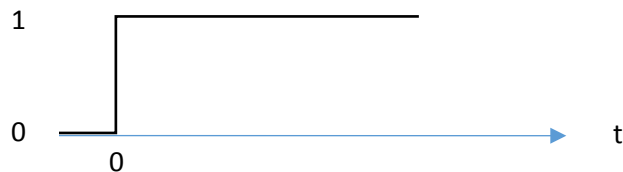
Voor de terugweg, geschreven als F^{-1} vinden dan natuurlijk weer $f(t)$, dus

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad \{23\}$$

We moeten bij het toepassen van Laplace, waar de demping nu ook een rol speelt, uit gaan van signalen die tot $t = 0$ constant 0 blijven en vanaf $t > 0$ iets doen. We schrijven daarvoor $f(t) * 1(t)$ of kortweg $f(t)1(t)$.

We gaan een functie $f(t)$ uitwerken en kijken wat de Laplace beschrijving (getransformeerde) dan is.

Stel $f(t) = 0$ voor $t < 0$ en $f(t) = 1$ voor $t \geq 0$, dus we schrijven daarom $f(t) = 1 * 1(t) = 1(t)$ {24}

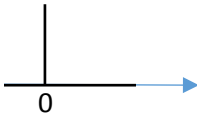
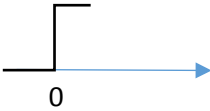
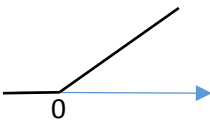
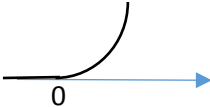
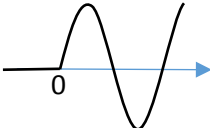


Omdat de integraal vanaf 0 geldt en de integraal vanaf $t = 0$ wordt berekend, kan bij de invulling van $f(t)$ daar $1(t)$ weggelaten worden:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \{25\}$$

Opdracht: stel $f(t) = e^{-at} 1(t)$ en bewijs dat $F(s) = 1/(s + a)$

Zo zijn er ook Laplacebeschrijvingen voor allerlei functies. We gaan hier niet alle mogelijke signalen bewijzen. De meeste omzettingen die we gebruiken zullen in tabellen in de literatuur te vinden zijn. Een paar staan in onderstaande voorbeeldtabel.

Naam functie	$f(t)1(t)$	signaalgform	$F(s)$	
Impuls (dirac)	∞ op $t=0$ 0 op $t \neq 0$		1	{26}
Eenheidsstap (unit step)	1		$\frac{1}{s}$	{27}
Lineair (ramp)	t		$\frac{1}{s^2}$	{28}
Exponentieel (exponential)	e^{at}		$\frac{1}{s-a}$	{29}
Sinus	$\sin(\omega t)$		$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	{30}

In het lesboek Regeltechniek voor het HBO zien we een meer uitgebreide tabel (Tabel A.2) in bijlage A.2 (blz 233).

Ook kunnen we Laplace goed gebruiken om differentiaalvergelijkingen om te zetten. Zo is te bewijzen dat $\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow sY(s)$ en hogere (n) afgeleiden krijgen dan $s^n Y(s)$. Formeel moet het dan nog iets nauwkeuriger, maar die zaken gaan we niet verder uitdiepen, omdat we in de toepassing van het vakgebied vooralsnog uitgaan van signalen die 0 zijn op $t = 0$ en ook niet variëren in de tijd op $t = 0$.

Voorbeeld: $3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = 2x(t)$ wordt in Laplace geschreven als:

$$3s^2 Y(s) + 8sY(s) - 4Y(s) = 2X(s)$$

Integreren is de omgekeerde weg van differentiëren. In Laplace komt dit als volgt tot uiting:

$$\int y(t) dt \rightarrow \frac{1}{s} Y(s) \quad \{31\}$$

Tenslotte zijn er rekenregels waar aan moet worden voldaan. Zo mogen Laplace formules alleen bij elkaar worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken. Ze mogen niet met elkaar vermenigvuldigd worden of gedeeld worden op elkaar.

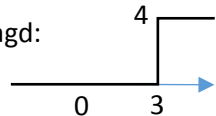
Ook is er een regel dat de sterkte van een signaal direct kan worden genomen in het s domein als volgt:

$$af(t) \rightarrow aF(s) \quad \{32\}$$

Een ander voorbeeld is dat als een signaal met tijd a wordt vertraagd, dit resulteert in e-macht in het s domein: $f(t - a) \rightarrow e^{-as}F(s)$ {33}

Voorbeeld van deze twee laatste regels:

Stapfunctie met sterkte 4 en 3 seconden vertraagd:



wordt $F(s) = 4 \frac{1}{s} e^{-3s} = e^{-3s} \frac{4}{s}$

Mbt de rekenregels zijn in de literatuur tabellen van te vinden. Probeer die goed te begrijpen voor de toepassing. Zie Tabel A.1 uit het lesboek Regeltechniek voor het HBO.

Referenties

- [1] Technische Universiteit Eindhoven, Dictaat Signaalanalyse (4A250), 2003.
- [2] Dr. J.J.M. Rijpkema, Technische Universiteit Eindhoven, College Systeemanalyse (4A320), 2002/2003.
- [3] http://nl.wikipedia.org/wiki/Formule_van_Euler
- [4] Regeltechniek voor het HBO 6^e druk ISBN 978-90-820148-1-5

*) waarom $1/T$ wegvalt moet nog helder worden gemaakt, maar laten we nu buiten het bestek van dit dictaat vallen.